EPREUVE DE CULTURE SCIENTIFIQUE
MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

Soit $k \geq 1$ un entier, on introduit les notations suivantes : $Mat(k, \mathbb{C})$ est l'algèbre des matrices $k \times k$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, $Diag \subset Mat(k, \mathbb{C})$ est la sous-algèbre des matrices diagonales et $I \in Diag$ est la matrice identité. On note aussi $B = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $B^n = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$, $Mat(k, B) = C^\infty(\mathbb{R}, Mat(k, \mathbb{C}))$. Soit $a \in Diag$ une matrice diagonale à valeurs propres distinctes deux à deux. Soit $q \in Mat(k, B)$ et soit $L : B^n \to B^n$ l'opérateur défini par $Lf(x) = \frac{df(x)}{dx} + (q(x) - \lambda a)f(x)$ avec $q \in Mat(k, B)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ un paramètre. Rappelons qu'on note $[a, b] = ab - ba$ pour des éléments a, b d'une algèbre.

a) Pour $b \in Mat(k, \mathbb{C})$, montrer que si $[a, b] \in Diag$ alors $b \in Diag$.

On désigne par $Mat(k, B)((\lambda^{-1}))$ l'algèbre des séries formelles en λ^{-1} à coefficients dans $Mat(k, B)$. Rappelons que c'est une algèbre dont les éléments sont de la forme $p = \sum_{i=-\infty}^{m} p_i \lambda^i$ ou $p_i \in Mat(k, B)$, $m \in \mathbb{Z}$, la multiplication et l'addition de deux tels éléments étant définie de façon évidente. Soit $p \in Mat(k, B)((\lambda^{-1}))$, on note $p_+ = \sum_{i \geq 0} p_i \lambda^i$ et $\mathrm{res}\,(p) = p_{-1}$ (i.e. le coefficient devant λ^{-1}) .

b) Soit $p \in Mat(k, B)((\lambda^{-1}))$, montrer que si $[p, L] = 0$ alors $[p_+, L] = [\mathrm{res}\,(p), a]$ (en particulier $[p_+, L]$ ne dépend pas de λ).

c) Montrer que tout élément de $Mat(k, \mathbb{C})$ peut s'écrire sous la forme $h + [t, a]$ où h est dans $Diag$ et t est dans $Mat(k, \mathbb{C})$.

Soit $p \in Mat(k, B)((\lambda^{-1}))$ un élément de la forme $p = \sum_{i=-\infty}^{0} p_i \lambda^i$, où $p_0 \in Mat(k, B)$ est inversible. Rappelons qu'un tel p admet un inverse $p^{-1} \in Mat(k, B)((\lambda^{-1}))$.

d) Montrer qu'il existe une série formelle $T \in Mat(k, B)((\lambda^{-1}))$ de la forme $I + \sum_{i=1}^{\infty} T_i(x)\lambda^{-i}$ telle que TLT^{-1}est de la forme $L_0 = \frac{d}{dx} - \lambda a + \sum_{i=0}^{\infty} h_j(x)\lambda^{-j}$ où $h_j(x)$ sont des fonctions C^∞ qui prennent leurs valeurs dans $Diag \subset Mat(k, \mathbb{C})$. (Indications : en utilisant c) trouver une solution à l'équation $TL = L_0 T$.)

e) Montrer que pour deux séries formelles T, T' comme dans la question d), il existe une série formelle S telle que $T = ST'$ où les coefficients de la série formelle S sont des matrices diagonales.

On désigne par $Diag((\lambda^{-1}))$ la sous-algèbre des séries formelles en λ^{-1} à coefficients dans matrices diagonales *constantes*.

f) Soit $p \in Mat(k, B)((\lambda^{-1}))$, montrer que $[p, L] = 0$ si et seulement si $p \in T^{-1} Diag((\lambda^{-1}))T$ où T est une série formelle comme dans d).

Pour $b \in Diag((\lambda^{-1}))$, on note $\varphi(b) = T^{-1}bT$ où T est une série formelle comme dans la question d). On déduit de e) que $\varphi : Diag((\lambda^{-1})) \to Mat(k, B)((\lambda^{-1}))$ est bien défini.

g) Soit $q = q(x,t)$ une fonction C^∞ de deux variables à valeurs dans $Mat(k, \mathbb{C})$ et L la famille des opérateurs $B^n \to B^n$ dependants de t et définis par $Lf(x) = \frac{df(x)}{dx} + (q(x,t) - \lambda a)f(x)$, qui satisfait

$$\frac{dL}{dt} = [(\varphi(b))_+, L]$$

pour un certain $b \in Diag((\lambda^{-1}))$ qui est fixé. Soit $L_0 = \frac{d}{dx} - \lambda a + \sum_{i=0}^{\infty} h_i(x,t)\lambda^{-i}$ comme dans la question d) où $h_i(x,t)$ sont des fonctions C^∞ à valeurs dans $Diag$. On note $H = \sum_{i=0}^{\infty} h_i\lambda^{-i}$. Montrer qu'il existe une série formelle $B(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i(x,t)\lambda^{-i}$ où les $B_i(x,t)$ sont des fonctions C^∞ à valeurs dans $Diag$ telles que

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} = 0$$

EPREUVE DE CULTURE SCIENTIFIQUE
MATHEMATIQUES

EXERCICE 2

a) Pour un nombre premier p, soit $F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le corps de cardinal p. Trouver l'ordre du groupe $GL(n, F)$, rappelons que c'est le groupe de toutes les transformations linéaires de l'espace vectoriel de dimension n sur F. (Indications: si $(b_1, \ldots, b_n)$, $(b'_1, \ldots, b'_n)$ sont deux bases dans l'espace vectoriel F^n, alors il existe une unique transformation linéaire qui envoie $(b_1, \ldots, b_n)$ sur $(b'_1, \ldots, b'_n)$).

b) Pour un nombre premier $p > 2$, soit $F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le corps de cardinal p. On considère l'espace vectoriel symplectique standard (F^{2n}, ω), qui est l'espace vectoriel F^{2n} muni de la forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée $\omega(x, x') = \sum_{i=1}^{n}(x_i x'_{i+n} - x_{i+n}x'_i)$. Trouver l'ordre du groupe des transformations symplectique $Sp(2n, F)$, qui est le groupe de toutes les transformations linéaires préservants la forme quadratique ω).

c) Pour un nombre premier $p > 2$, montrer que si $p^l \mid N$ et $k < p^l$ alors $p \mid \binom{N}{k}$ et plus généralement $p^m \mid \binom{N}{k}$ si $m < l - \log_p k + 1$.

Soit $n \geq 1$ un entier et soit $GL(n, \mathbb{Z})$ le groupe des matrices inversibles $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

d) Soit $p > 2$ un nombre premier et $B \in GL(n, \mathbb{Z})$ une matrice telle qu'il existe au moins un coefficients de B qui n'est pas divisible par p. Montrer que toutes les matrices de la forme $I + p^r B$, ou $r \in \mathbb{N}$, sont d'ordre infini dans $GL(n, \mathbb{Z})$.

e) Montrer que pour tout entier n il existe, à isomorphisme près un nombre fini de sous-groupes finis dans $GL(n, \mathbb{Z})$.

EPREUVE DE CULTURE SCIENTIFIQUE
MATHEMATIQUES

EXERCICE 3. *(recommandé pour les candidats de la discipline secondaire)*

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ existe-t-il un produit scalaire $s(X,Y)$ sur $\mathbb{R}^2$ tel que A soit auto-adjointe par rapport à s (c'est-à-dire $s(AX,Y) = s(X,AY)$) ? Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Trouver le nombre de carrés positifs et négatifs dans la diagonalisation de la forme quadratique de n variables

$$\sum_{i<j} x_i x_j$$

Soit $n \geq 1$ un entier. Soit A une matrice $n \times n$ symétrique dont les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont deux à deux distinctes. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, dont le produit scalaire est noté (,), on considère l'ensemble

$$S_\lambda = \left\{ x \in \mathbb{R}^n | ((A - \lambda I)^{-1} x, x) = 1 \right\}$$

pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

c) Soit $n = 3$. Montrer que S_λ est une surface non-singulière, c'est-à-dire que pour chaque point $x \in S_\lambda$, il existe un voisinage de x dans S_λ difféomorphe à un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^2$.

d) Montrer que pour chaque x dans $\mathbb{R}^n$, il existe au maximum n valeurs distinctes de λ telles que x appartient à S_λ.

e) Montrer que les hypersurfaces S_λ passant par un point x dans $\mathbb{R}^n$ et correspondant à des valeurs de λ distinctes sont orthogonales deux à deux.

f) On considère que le plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x,y) est formé d'un matériau d'indice de réfraction $\eta(x,y) = \frac{1}{y+1}$. Trouver les trajectoires des rayons lumineux dans un tel matériau plan en utilisant la loi de Snell disant que en chaque point de la trajectoire, le sinus de l'angle entre la droite tangente de la trajectoire et l'axe des y est proportionnel à l'inverse de l'indice de réfraction en ce point.